令和２年度・入学試験問題（後期）

数　　学（経）

注　意　事　項

1. 試験開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 試験開始後，すべての解答用紙に氏名（カタカナ）及び受験番号を記入しなさい。受験番号が正しく記入されていない場合は，採点できないことがあります。また，氏名（カタカナ）及び受験番号以外の文字，数字などは，絶対に記入してはいけません。
3. 答案は解答用紙の各問題番号の欄に記入しなさい。
4. 解答用紙の裏面には何も書いてはいけません。
5. 試験終了後，問題冊子および下書用紙は持ち帰りなさい。

すべての問題について，求める手順をわかりやすく説明すること。

1. 座標平面において, 点 P $(\sin 2\theta, \cos\theta)$ をとる。ただし $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。点 P を通り, 頂点が原点であるような放物線を C とする。また, 点 P における放物線 C の接線を ℓ とする。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C の方程式を求めよ。また, 接線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と接線 ℓ および x 軸で囲まれた部分の面積を S とする。$t = \sin\theta$ とおく。S を t で表せ。また, θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, S の最大値を求めよ。

2. 空間内に四面体 OABC があり, $\mathrm{OA} = 1$, $\mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = \dfrac{\pi}{3}$ とする。点 O から 3 点 A, B, C が作る平面に垂線を引き, 垂線と平面の交点を H とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ を用いて表せ。

(3) 直線 CH と辺 AB との交点を M とする。長さの比 AM : BM, CH : HM を求めよ。

3. 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2, \qquad b_1 = 3,$$

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n < b_n \text{であるとき}) \\ 2a_n & (a_n \geqq b_n \text{であるとき}) \end{cases} \qquad b_{n+1} = \begin{cases} b_n & (a_n < b_n \text{であるとき}) \\ 3b_n & (a_n \geqq b_n \text{であるとき}) \end{cases}$$

$$c_n = (-1)^n a_n$$

また，$\{c_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の最初の 7 項は右の表のようになる。

n	1	2	3	4	5	6	7	……	
$\{a_n\}$	2	3	6	7	8	9	18	…	…
$\{b_n\}$	3	3	9	9	9	9	27	…	…
群	1		2				3		…

$\{b_n\}$ について，値が同じ複数の項を 1 つの群として扱う。例えば，$b_1 = b_2 = 3$ であるので b_1 と b_2 は第 1 群にある。同様に，$b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = 9$ であるので b_3, b_4, b_5, b_6 は第 2 群にある。

次の問いに答えよ。

(1) 第 k 群の初項が第 m 項であるとする。a_m および b_m を k で表せ。

(2) 第 k 群にある $\{b_n\}$ の項の数を k で表せ。

(3) p を正の整数とするとき，S_{2p} を p で表せ。

(4) $S_n > 1000$ となる最小の n の値を求めよ。

4. ある工場の点検作業は, m 種類の項目で構成されている。全項目を1回ずつ実施する作業計画をたてる。作業期間は n 日間 $(m \geqq n)$ とし, それぞれの日で実施する項目の割り当てを次の条件 (a), (b), (c), (d) のもとで作成する。

(a) 開始した項目はその日のうちに実施し終える。

(b) いずれの日も少なくとも1種類の項目は実施する。

(c) それぞれの項目は1種類ずつ順番にしか実施できない。

(d) 1日に複数種類の項目を実施するとき, その順番が違う場合は異なる作業計画とする。

例えば, $m = 3, n = 2$ のとき, 以下の表の作業計画 A, B, C, D はすべて異なる。

作業計画	1日目	2日目
A	項目2を実施	項目1→項目3の順に実施
B	項目1→項目3の順に実施	項目2を実施
C	項目3→項目1の順に実施	項目2を実施
D	項目3を実施	項目1→項目2の順に実施

次の問いに答えよ。

(1) $m = 6, n = 5$ のとき, 条件を満たす作業計画は何通りあるか。

(2) $m = 6, n = 5$ のとき, 条件を満たし, かつ3日目終了時点でちょうど3種類の項目を実施し終える作業計画は何通りあるか。

(3) $m = 50, n = 5$ のとき, 条件を満たす作業計画の中から1つを無作為に選ぶ。3日目終了時点でちょうど k 種類の項目 $(3 \leqq k \leqq 48)$ を実施し終える作業計画が選ばれる確率を p とする。k を変化させたときの p の最大値を求めよ。